Distribuzioni, Dichiarazioni e Dintorni

di Luigi Salemi

Quando ci sediamo per giocare a Bridge e raccogliamo le nostre carte possono capitarci mani eccezionali come a) AKQJ – AKQ – AKQ – AKQ o mani considerate comuni come b) KJ86 – J84 – Q97 – 843 o c) KJ32 – J87 – Q42 – 642. Quasi mai ci fermiamo a riflettere che ciascuna delle mani indicate è unica e molto probabilmente non abbiamo mai ricevuto nessuna delle tre.

Questo succede perché in modo automatico trattiamo le mani b) e c) come KJxx – Jxx – Qxx – xxx, ma questa non è una mano bensì una famiglia di mani che contiene 3.919.104 mani; o ancora più genericamente come una 4-3-3-3 (4^ di Picche) di 7 punti una famiglia ancora più grande che contiene più di unmiliardotrecentomilioni di mani (da non confondere con la generica 4333 di 7 punti che contiene oltre 5 miliardi di mani).

E' anche vero che avendo a disposizione un numero limitato di dichiarazioni siamo obbligati ad accorpare più mani per poter descrivere al meglio quello che ci è capitato in sorte, vediamo in dettaglio quali problemi si pongono

Le mani possibili sono $6.35x10^{11}$ ovvero 635 miliardi, di contro disponiamo di sole 36 dichiarazioni compreso il PASSO, come dire che ogni dichiarazione dovrà accorparne mediamente poco meno di 18 miliardi.

Dopo che abbiamo raccolto le nostre carte il nostro Compagno ha a disposizione $8.12x10^{9}$ mani, questo perché le nostre 13 carte non fanno più parte di quelle disponibile e deve contentarsi delle residue 39, ma si tratta pur sempre di oltre 8 miliardi di combinazioni.

Idealmente noi vorremmo conoscere il totale delle 2 mani cioè 5.15×10^{21} combinazioni, ovvero 5.000 miliardidimiliardi. Ma di quante sequenze dichiarative disponiamo per descrivere un tale immenso universo?

Proviamo a rispondere a questa domanda quando solo una linea effettua licite diverse da PASSO. Anzitutto osserviamo che se poniamo come licita massima 1 Fiori le dichiarazioni possibili sono 4:

1) 1F p p p
2) p 1F p p p
3) p p 1F p p p
4) p p p 1F p p p

Se poniamo come licita massima 1 Quadri le dichiarazioni possibili diventano 12 potendo aggiungere alle 4 sopra dette le 4 che si ottengono allungando con la licita di 1Q:

1) 1F p 1Q p p p
2) p 1F p 1Q p p p
3) p p 1F p 1Q p p p
4) p p p 1F p 1Q p p p

e le 4 che si ottengono sostituendo 1F con 1Q

1) 1Q p p p
2) p 1Q p p p
3) p p 1Q p p p
4) p p p 1Q p p p

Se poniamo come licita massima 1 Cuori diventano 28, ovvero le 12 già viste, altre 12 ottenute allungando le sequenze con 1C e le 4 che si ottengono sostituendo 1F con 1C nelle 1), 2), 3) e 4).

Abbiamo così trovato una formula ricorsiva che ci consente di calcolare il numero delle dichiarazioni possibili ponendo come licita massima X noto il numero delle dichiarazioni possibili ponendo come licita massima X-1 ♠X= PASSO, 1F, 1Q, .., 7SA; così se X=2P allora X-1=2C, ecc.♡.

Indicando con f(X) questa funzione avremo: f(X)=f(X-1) x 2 + 4

f(0)=f(PASSO)=0
f(1)=f(1F)=0 x 2 + 4=4 (Questo valore lo avevamo già trovato per via diretta)
f(2)=f(1Q)=4 x 2 +4=12 (Anche questo trovato per via diretta a conferma della teoria)
f(3)=f(1C)=12 x 2 +4=28
f(4)=f(1P)=28 x 2 + 4=60
….
f(14)=f(3P)=65.532
f(15) =f(3SA)=131.068
f(16)=f(4F)= 262.140
f(17))=f(4Q)= 524.284
f(18)=f(4C)=1.048.572
f(19)=f(4P)=2.097.148
f(20)=f(4SA)=4.194.300
f(21)=f(5F)=8.388.604
f(22)=f(5Q)=16.777.212
f(23)=f(5C)=33.554.428
f(24)=f(5P)= 67.108.860
f(25)=f(5SA)= 134.217.724
f(26)=f(6F)=268.435.452
….
f(34)=f(7P)=6.87 x 10^{10}
f(35)=f(7SA)=1.37 x 10^{11}

E se adesso dividiamo 5.15 x 10^{21} per 1.37 x 10^{11} otteniamo circa 40 miliardi di combinazioni di mani da descrivere con ogni sequenza dichiarativa. La situazione è addirittura peggiorata rispetto a prima!

Il problema della dichiarazione va quindi affrontato in modo diverso, a questo scopo accorpiamo tutte le mani che hanno la stessa distribuzione e lo stesso punteggio, questo produce 15.152 diverse combinazioni di cui vediamo un estratto

Picche	Cuori	Quadri	Fiori	Punti	Frequenza %	N.Mani
13	0	0	0	10	0,0000000000157	1
12	1	0	0	6	0,0000000001417	9
4	3	3	3	37	0,0000000000157	1
4	3	3	3	9	0,240101593965	circa 1.5 miliardi

Il File completo si chiama DistPunt.txt ed è disponibile insieme al programma APERTURE.exe nel sito del Circolo Bridge Catania all'indirizzo: www.visainformatica.it/cbc

Quando si usa un tale accorpamento ci sono alcune osservazioni da fare per non incorrere in errori di valutazione:

a) Alcuni accorpamenti sono finti in quanto identificano una ben determinata mano descritta interamente fino alla più piccola cartina (es. la prima e la terza)
b) Quando si possiede una mano di un qualche tipo il Compagno vede ridursi le possibilità di distribuzioni e punteggi, ma mentre prima questo insieme ridotto aveva una dimensione fissa adesso, a seconda del tipo di mano che possediamo, le possibilità del Compagno si modificano in maniera significativa; in generale più è rara la nostra mano in termini di distribuzione/punti minore è il numero di combinazioni di cui il nostro Compagno dispone.
c) I numeri hanno un loro fascino, ma a volte sono difficili da inquadrare nel contesto reale. Per meglio capire cosa identificano le frequenze esposte supponiamo di giocare 630 mani a settimana (che è un bel giocare), allora una tipologia di mani che ne raggruppa 1,5 miliardi ci capiterà 1 o 2 volte a settimana, se ne raggruppa 100 milioni ci capiterà ogni 10 settimane, se ne raggruppa 10 milioni ci capiterà una volta ogni 2 anni, se ne raggruppa un milione ci capiterà ogni 20 anni, ecc.

Per effetto di quanto detto dobbiamo ridurre il numero delle combinazioni del Compagno, una stima attendibile è quindi data da 15.152 x 12.880 = circa 195 milioni di combinazioni. Questo significa che con il sistema degli accorpamenti possiamo descrivere ogni combinazione di carte della Linea con licite che non superano 6 Fiori, abbiamo fatto un passo avanti, ma non è molto salutare arrivare a 6 Fiori per scoprire che il par della Linea era 4 Picche.

Supponiamo allora di ignorare tutte le combinazioni distribuzioni/punti che raggruppano meno di 10 milioni di mani (quelle che capitano una volta ogni 2 anni a chi gioca tanto), ne restano 4.420 che moltiplicate per le 4.420 del Compagno (non apporto nessuna riduzione alle combinazioni del Compagno, ho scartato la totalità delle combinazioni limite e quelle che restano sono praticamente tutte possibili) fa circa 19.5 milioni di combinazioni Linea che si possono descrivere senza superare il livello di 5 Cuori.

Da notare che pur passando da 15.152 a 4.420 combinazioni abbiamo perso SOLO un 1% delle mani, peccato che il livello dichiarativo sia ancora elevato e poco pratico per gli i nostri scopi.

Facciamo un ulteriore accorpamento di ufficio mettendo insieme mani che a parità di distribuzione differiscono di un punto (es. 4-3-3-3 di 11 e 12 punti, 2-3-5-3 di 17 e 18 punti, ecc.). Questo dimezza le combinazioni portandole a 2.210 (ricordiamoci di questo numero) portando le combinazioni Linea sotto i 5 milioni così che si possono descrivere senza superare il livello di 5 Fiori.

Per finire consideriamo che se abbiamo meno punti dell'altra linea il problema dichiarativo è più loro che nostro, possiamo quindi ragionevolmente scartare il 50% delle combinazioni portando il totale intorno ai 2,5 milioni così da poterlo descrivere senza superare il livello di 4 SA.

Chi ritiene che il livello di 4 SA sia ancora elevato può ridurre ulteriormente ignorando le combinazioni che raggruppano meno di 100 milioni di mani. Si rifanno tutti i ragionamenti e restano solo 160.000 combinazioni Linea che si posso descrivere senza superare il livello di 4 Fiori. E' bene sapere che in questo caso stiamo trascurando il 20% del monte mani, come la giriamo giriamo la Dichiarazione resta una cosa complicata.

Sino ad ora abbiamo fatto pura Teoria, nella realtà non possiamo decidere da quanti PASSO sia preceduta la nostra prima dichiarazione essendo questo legato al board che giochiamo e non alla nostra volontà, è quindi realistico dividere per 4 i valori trovati. Così, ad esempio, entro il livello di 3 SA possiamo descrivere solo 32.767 combinazioni Linea. Ma questo non è un numero tanto piccolo, quanti sistemi dichiarativi utilizzano almeno il 20% di questo potenziale? Non sono un esperto, ma penso nessuno; è mia personale convinzione che vi siano molti spazi di miglioramento in questo settore.

Qualche tempo fa il mio amico Paolo Marletta si è posto la seguente domanda:"Se utilizzo un sistema a relè quanti spazi descrittivi possiedo senza superare il livello di 3SA?" E già che c'era ha trovato anche la risposta:

a) L'apertura di 3 SA può descrivere un solo tipo di mano non essendoci spazio per il relè, stessa sorte per 3 Picche e 3 Cuori
b) 3 Quadri può invece descrivere 2 tipi di mano che sul 3C relè si chiarisco con 3P e 3SA
c) Meglio si può fare con 3 Fiori che sul 3Q relè può descrivere 3 tipi di mano
d) Ed ancora meglio con 2 SA che sul relè 3F descrive subito 3 tipi di mano con 3C, 3P, 3SA, mentre il 3Q consente il relè 3C e descrive altri 2 tipi di mano con 3P e 3SA. In totale 5 tipi di mano

Toh chi si rivede, la cara vecchia successione di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, .. in cui ogni termine è pari alla somma dei 2 che lo precedono. Qui per la verità abbiamo un 1 in più all'inizio, ma per il resto è quella e da 3SA a 1F la possiamo scrivere tutta; anzi di più

3SA	3P	3C	3Q	3F	2SA	2P	2C	2Q	2F	1SA	1P	1C	1Q	1F	PASSO
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Se sommiamo tutti i termini (escluso al momento il PASSO) scopriamo che possiamo descrivere 987 tipi di mano. Sono sicuro non ve ne importa niente, ma questa successione di Fibonacci allungata con l'1 iniziale gode di una notevole proprietà: la somma di tutti i termini fino ad "n" è pari al valore della successione di posizione "n+2", così se allunghiamo la successione dopo il PASSO il valore da attribuire a questo nuovo termine è 377+610=987, proprio la somma che ci interessava trovare per tutti i termini da 3SA a 1F.

Come si vede le dichiarazioni più alte descrivono pochissime mani e quelle più basse molte. Inoltre ogni qual volta si aggiunge una dichiarazione si ha un notevole incremento delle mani descritte.

Sembra quindi una buona idea allungare la sequenza verso l'alto inserendo 4 Fiori, ma soprattutto verso il basso inserendo PASSO. In quest'ultima ipotesi occorre però sacrificare una dichiarazione che deve contenere le mani di "non apertura", ovvero quelle che diversamente sarebbero state descritte dal PASSO. Supponendo di utilizzare a questo scopo 1P dobbiamo aggiungere 610 (ciò che abbiamo guadagnato inserendo il PASSO) e togliere 89 (ciò che abbiamo perso sacrificando 1P). Ora in totale si possono descrivere 1.508 tipi di mano.

Se vi ricordate prima per descrivere 2.210 tipi di mano in nostro possesso ed altrettante del Compagno bisognava raggiungere il livello di 5 Fiori; anche utilizzando il gadget di non descrivere quelle in cui abbiamo meno punti dell'altra Linea (ma come si fa a saperlo?) bisognava comunque salire fino a 4 SA.

Ora possiamo descrivere 3/4 di queste tipologie di mani restando entro il più confortevole livello di 3SA, il Compagno aggiunge la propria distribuzione (la guarda visto che ce la in mano, non ha bisogno di descriverla) ed ha abbastanza informazioni per determinare il contratto più corretto. All'occorrenza ha ancora spazi dichiarativi a sufficienza per approfondite indagini verso i contratti di Slam.

Se poi proprio ci teniamo a descrivere compiutamente almeno 2.210 tipi di mano aggiungiamo una ulteriore dichiarazione a 4F, tanto la nuova somma siamo in grado di farla velocemente: dopo 987 viene 1.597 e dopo ancora 2.584 da cui dobbiamo togliere 144 (se parto da 4F la dichiarazione di 1P sacrificata per le mani di NON apertura non vale più 89, ma 144) ottenendo 2.440.

Allora restando dentro i margini del 4 Fiori possiamo descrivere circa il 10% in più delle distribuzione che prima descrivevamo salendo fino a 4SA. Se mai vi siete chiesti se un sistema a relè avesse una potenza descrittiva superiore al tradizione ParlaTuCheParloIo ora conoscete la risposta.

Certo che se sulla superba apertura di PASSO, foriera di migliaia di significati da approfondire, l'Avversario dice 3 Cuori il giocattolo si rompe, pur non di meno penso che qualcuno dovrebbe scrivere il "FiboMarle" almeno per vedere come risolve il problema di distribuire le tipologie di mano nelle varie caselle disponibili.

Fatto 30, facciamo 31. Se interviene anche l'altra linea dobbiamo considerare il numero totale delle Smazzate che è 5.36×10^{28} ovvero 53 miliardidimiliardidimiliardi. Quante sono le licite possibili?

Un paio di anni fa ho trovato questa formula ricorsiva con un ragionamento simile a quello precedente: $g(X)=g(X-1) \times 22 + 7$ che produce i seguenti risultati

$g(0)=g(PASSO)=1$
$g(1)=g(1F)=1 \times 22 + 7=29$
$g(2)=g(1Q)=29 \times 22 + 7=645$
….
$g(22)=g(5Q)=4.55 \times 10^{29}$
....

$g(35)=g(7SA)=1.28 \times 10^{47}$

Questo vuol dire che se le 2 Linee collaborano si possono descrivere tutte le Smazzate fino alla più piccola cartina utilizzando una qualche sequenza dichiarativa, anzi si può fare questo in miliardi di miliardi di modi diversi o, il che è più interessante, si può fare senza superare il livello di 5 Quadri. "Putenza di lu gibbiuni!" **

Ero contendo del risultato conseguito e mi chiedevo se fosse originale e se questa informazione fosse già nota. Recentemente ho scoperto che il risultato è originale , MA l'informazione è già nota fin dagli anni '70. Non posso citare il nome di chi per primo ha trovato tale risultato perché non lo conosco, ma voglio riportare il ragionamento utilizzato perché lo trovo delizioso nella sua semplicità ed efficacia.

a) Le licite disponibili sono 35 (da 1 Fiori a 7 SA), le sequenze dichiarative si chiudono sempre con 3 PASSO
b) Ogni licita può essere seguita in 7 modi da Contro e Surcontro che esemplifichiamo nel caso di 3 Quadri: 3Q, 3Q !, 3Q p p ! , 3Q ! !!, 3Q ! p p !!, 3Q p p ! !!, 3Q p p ! p p !!
c) Ogni licita può essere preceduta da 2 PASSO, 1 PASSO o nessun PASSO e questo porta i 7 casi precedenti a 7 x 3=21
d) Ogni licita può NON esserci (nella stesura che ho visto tale condizione viene indicata con NULL, nel caso di 3 Quadri veniva scritta come 3Q♠NULL♡). Questo porta il totale a 22 per ogni licita

Cosi la sequenza "p 1F p p 1C p p p" si scriverebbe : (p 1F) (1Q♠NULL♣) (p p 1C) (1P ♠NULL♣) (1SA♠NULL♡) …. (7P♠NULL♣) (7SA♠NULL♣) p p p

e) C'è una sequenza priva di significato, quella corrispondente a tutti NULL ovvero a "p p p" che va tolta, fino a questo momento la formula sarebbe $22^{35} - 1$. Inoltre noi non abbiamo considerato il caso in cui la prima licita viene preceduta da 3 PASSO, dobbiamo quindi aggiungere un terzo al numero trovato o, il che è equivalente, moltiplicare per 4/3. Infine non abbiamo considerato il Tutti PASSO e dobbiamo aggiungere 1.

La formula definitiva è Numero Sequenze Dichiarative = $4/3 \times (22^{35} - 1) + 1$.

"Se questa è giusta la mia è sbagliata" mi sono detto la prima volta che l'ho vista, ed ho avuto un pizzico di delusione. Ma la aritmetica è capricciosa ed a volte manifesta risultati equivalenti in modalità diverse come si può verificare dallo schema che segue:

	$g(X)=g(X-1) \times 22 + 7$	$g(X)=4/3 \times (22^X-1) + 1$
Passo	1	$4/3 \times (22^0-1) + 1=1$
1 Fiori	$1 \times 22 + 7=29$	$4/3 \times (22^1-1) + 1=29$
1 Quadri	$29 \times 22 + 7=645$	$4/3 \times (22^2-1) + 1=645$
….		
7 S.A.	$\sim 1.28 \times 10^{47}$	$4/3 \times (22^{35}-1) + 1=\sim 1.28 \times 10^{47}$

Cambia la forma, ma non la sostanza.